Ministère de l'éducation nationale

Session 2016

PE2-16-PG2

Repère à reporter sur la copie

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ÉCOLES

Mardi 19 avril 2016
Deuxième épreuve d'admissibilité

Mathématiques	**Durée : 4 heures** **Épreuve notée sur 40**

Rappel de la notation :
- première partie : **13 points**
- deuxième partie : **13 points**
- troisième partie : **14 points**

5 points au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note **globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire**.

Ce sujet contient 11 pages, numérotées de 1 à 11. Assurez-vous que cet exemplaire est complet.
S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L'usage de la calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.

L'usage de tout autre matériel électronique, de tout ouvrage de référence et de tout document est rigoureusement interdit.

N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine etc.
Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.

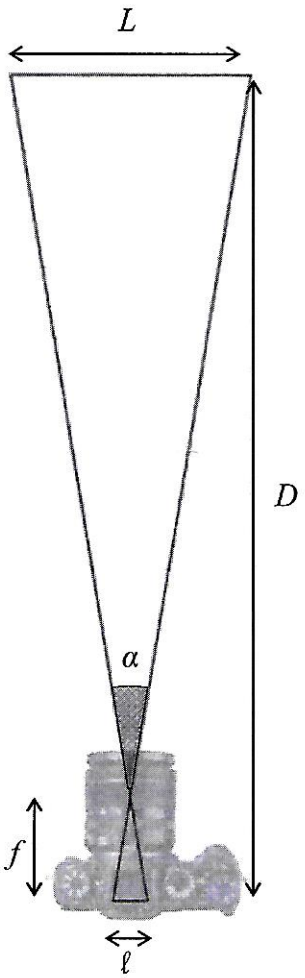
Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

PREMIÈRE PARTIE

(13 points)

Ce problème porte sur l'utilisation d'un appareil photo numérique et étudie son fonctionnement.

L'appareil photo



Notations et vocabulaire utilisés dans tout le problème

- L est la largeur de la scène photographiée ;
- α est l'**angle de champ** (angle sous lequel la scène est vue) ;
- ℓ est la largeur du capteur numérique situé à l'arrière de l'appareil photo ;
- D est la distance entre la scène photographiée et le capteur numérique ;
- f, qui sera appelée **focale** de l'objectif, est la distance entre le capteur et le centre optique de l'objectif. C'est une caractéristique essentielle d'un objectif. Elle s'exprime généralement en millimètre (mm).

A : lectures graphiques

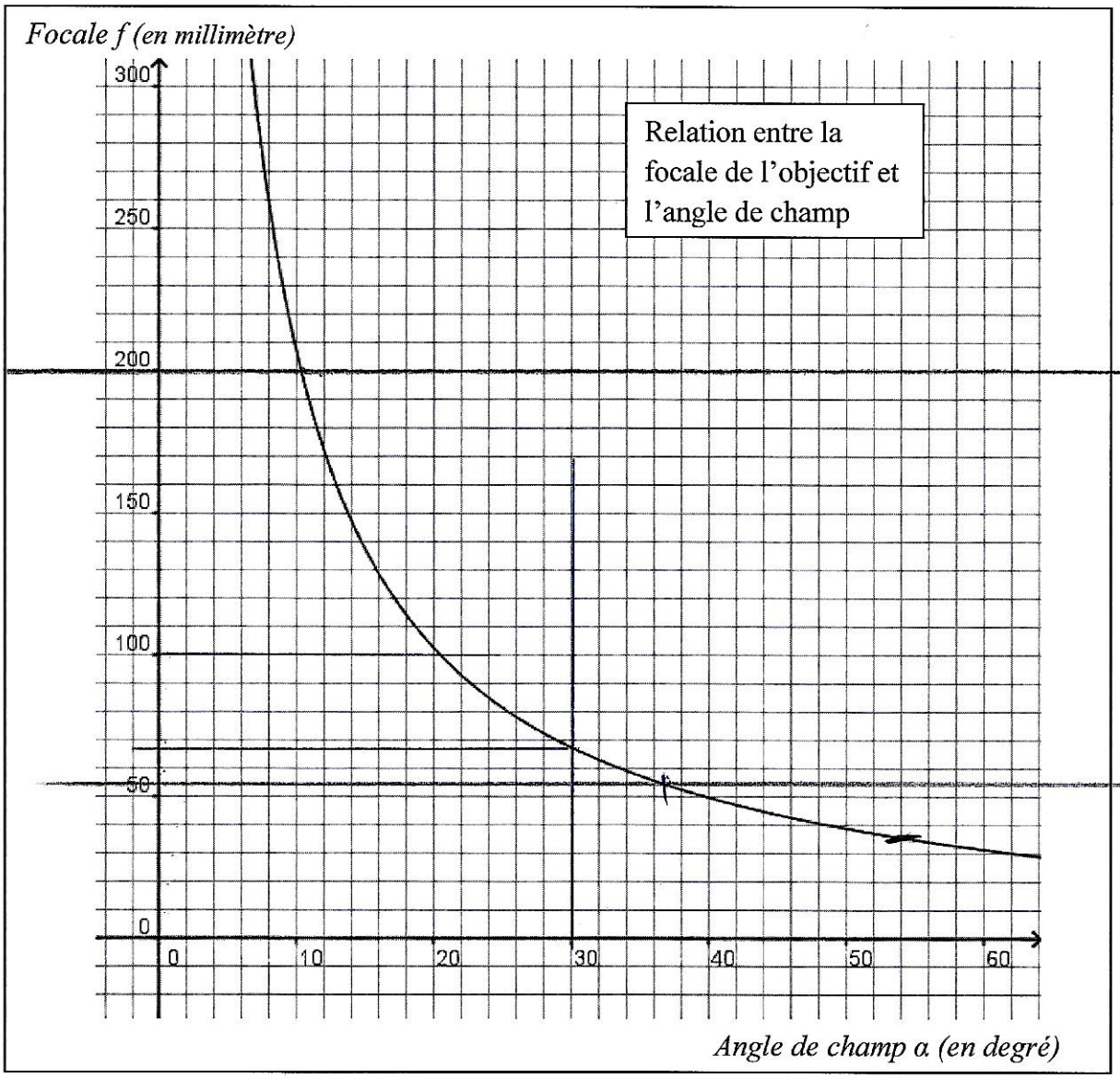
Un photographe doit couvrir un spectacle théâtral.

Le graphique ci-après indique, pour son appareil, la relation entre la focale f de l'objectif et l'angle de champ α.

1. Du fond de la salle, il veut prendre une photo du spectacle avec un angle de champ $\alpha = 30°$. Déterminer à l'aide du graphique à quelle focale cela correspond.

2. À l'aide du graphique, estimer à quel angle de champ correspond une focale de 100 mm.

3. Le photographe dispose d'un objectif permettant d'obtenir une focale comprise entre 55 mm et 200 mm. Quels angles de champ peut-il obtenir avec cet objectif ?



B : Prises de vue dans un théâtre

Formule fondamentale

La formule suivante, dans laquelle toutes les distances doivent être exprimées dans la **même unité**, est admise dans cette partie **B**. Elle sera démontrée dans la partie **C**.

$$\frac{D}{f} = \frac{L}{\ell} + 1$$

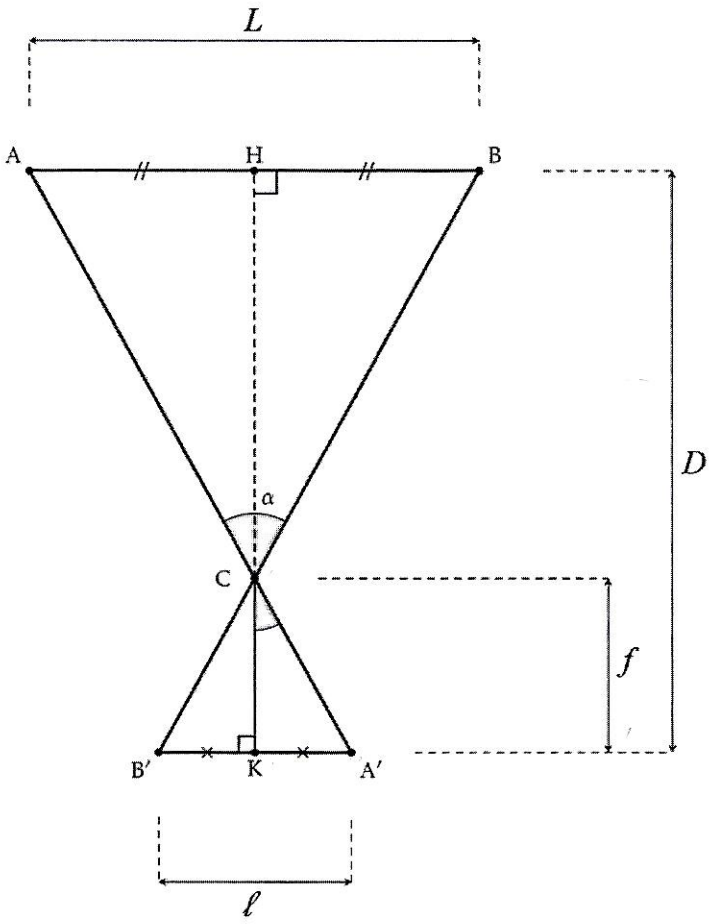
1. On considère que le capteur de l'appareil a pour largeur $\ell = 36$ mm et que le photographe est placé à $D = 12$ m de la scène du théâtre au centre de la salle.
   - **a.** En utilisant la formule précédente, déterminer la largeur de la scène photographiée L qui correspond à une focale de 35 mm. Donner la valeur arrondie au dixième de mètre.
   - **b.** La scène du théâtre mesure 15 m de large. Quelles focales, en millimètre, le photographe peut-il utiliser pour que la largeur de la scène photographiée soit au moins aussi grande que la largeur de la scène du théâtre ?

2. L'affirmation « *Si on est placé deux fois plus loin de la scène, il faut une focale deux fois plus longue pour photographier la même largeur de scène.* » est-elle vraie ? Justifier la réponse.

C : Étude théorique

Le but de cette partie est de démontrer la formule fondamentale utilisée dans la partie **B**.

On schématise la situation par la figure ci-contre dans laquelle les droites (AA′), (BB′) et (HK) sont concourantes en C.



1. À l'aide des informations portées sur la figure :

- **a.** Justifier que les droites (AH) et (A′K) sont parallèles.
- **b.** Démontrer que la droite (HK) est un axe de symétrie de la figure.

2. Justifier l'égalité : $\frac{\text{CH}}{\text{CK}} = \frac{\text{AH}}{\text{A'K}}$.

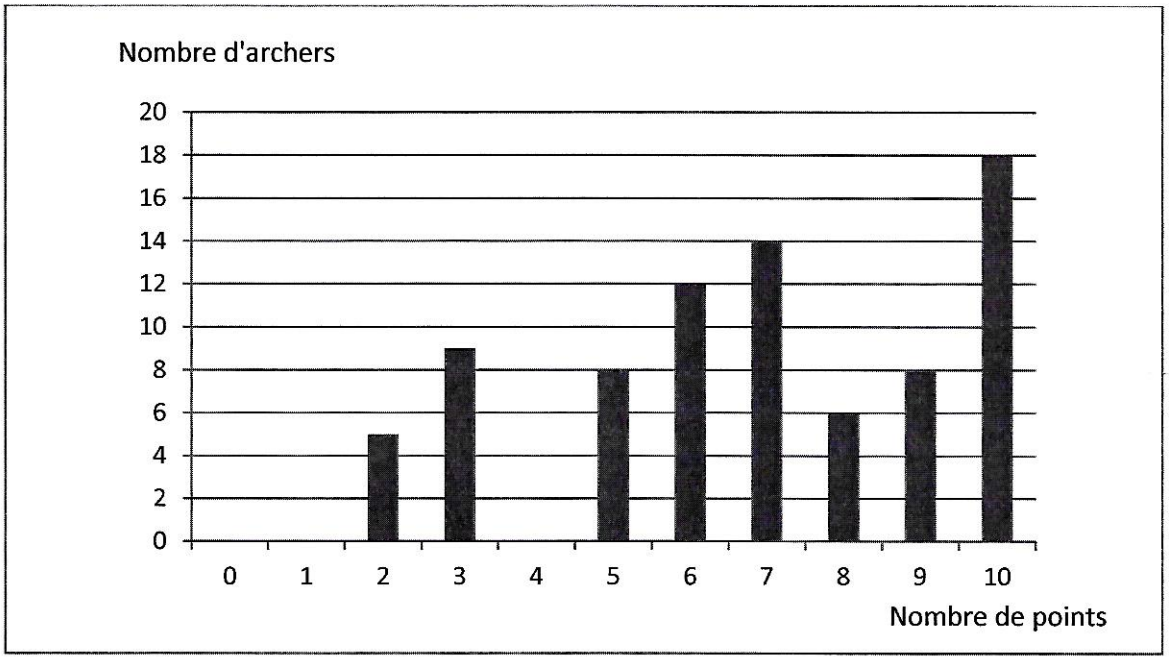
3. En déduire la relation : $\frac{D}{f} = \frac{L}{\ell} + 1$.

DEUXIÈME PARTIE

(13 points)

EXERCICE 1

Quatre-vingts archers d'un club de tir à l'arc A ont participé à un championnat. Le nombre de points obtenus par chaque archer du club est donné par le diagramme ci-dessous.



1. Répondre à l'aide du diagramme précédent aux questions suivantes.
   - **a.** Combien d'archers ont gagné exactement six points lors de ce championnat ?
   - **b.** Combien d'archers ont gagné trois points ou plus lors de ce championnat ?
   - **c.** Quel est le score médian des archers du club A ?

2. Le club de tir à l'arc voisin B a aussi participé à ce championnat. Voici quelques données relatives aux résultats des archers de ce club :
   - Le score moyen des archers lors du championnat est 7 points.
   - Le score moyen des dix meilleurs archers lors du championnat est 9,9 points.

   a. Comparer les résultats des deux clubs selon leurs scores moyens.

   b. Comparer les résultats des deux clubs selon les scores de leurs dix meilleurs archers.

EXERCICE 2

D'après MATh.en.JEANS, 2011-2012, Collège Mermoz, Marly

Une règle du jeu :

Le jeu se joue avec **deux** dés (dés cubiques non truqués, avec des faces numérotées de 1 à 6).

But de la partie : obtenir un cochon composé d'un corps, de deux yeux, de deux oreilles, de quatre pattes et d'une queue.

Début de la partie : chaque joueur lance un dé. Celui qui obtient le score le plus élevé commence à jouer puis chaque joueur joue successivement, en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre.

Déroulement du jeu : lorsque c'est son tour, le joueur lance les **deux** dés (non truqués).

Si le joueur n'a pas encore pris le corps de son cochon, il doit obtenir un 6 au moins avec l'un des deux dés :

- s'il n'obtient pas de 6, il passe les dés au joueur suivant ;
- s'il obtient un 6 au moins, il prend le corps de son cochon et relance les dés.

Si le joueur a déjà pris le corps de son cochon, il doit obtenir un ou plusieurs 1 pour prendre les attributs du cochon :

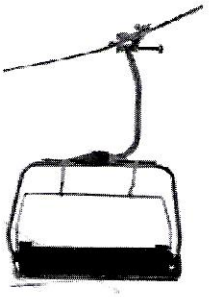
- s'il n'obtient pas de 1, il passe les dés au joueur suivant ;
- s'il obtient un seul 1, il peut prendre un œil, une oreille ou une patte, puis il relance les dés ;
- s'il obtient deux 1, il peut prendre la queue du cochon ou deux autres attributs (oreilles, yeux, pattes) identiques ou non, puis il relance les dés.

Fin de la partie : le gagnant est le premier joueur à avoir complété son cochon.

1. Nicolas affirme : « *Si dans la règle on remplaçait la valeur 1 par la valeur 2, on aurait deux fois moins de chances de gagner.* ».
   A-t-il raison ? Justifier.
2. Sophie affirme : « *J'ai deux fois plus de chance de pouvoir prendre une oreille que la queue* ! »
   A-t-elle raison ? Justifier.
3. Quelle est la probabilité qu'un joueur ne puisse pas prendre le corps du cochon ni lors de son premier tour de jeu ni lors de son deuxième tour de jeu ?

EXERCICE 3

Les télésièges sont équipés de véhicules fixés à un câble.
Sur un télésiège donné, tous les véhicules ont le même nombre de sièges, généralement compris entre deux et six.



Exemple de véhicule à quatre sièges

Pour des raisons de sécurité, l'espacement minimal entre deux véhicules sur le câble dépend de la vitesse de déplacement des véhicules et du nombre de sièges par véhicule selon la formule ci-dessous, valable pour un nombre de sièges inférieur ou égal à six :

$$E = V\left(4 + \frac{n}{2}\right)$$

où : E désigne l'espacement minimal en mètre (m) ;
V désigne la vitesse des véhicules en mètre par seconde (m/s) ;
et n désigne le nombre de sièges par véhicule.

Une feuille de tableur a été créée en vue de calculer l'espacement minimal entre deux véhicules d'un télésiège :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Nombre de sièges par véhicule					
2		Vitesse en m/s	2	3	4	5	6	
3		2	10	11	12	13	14	
4		2,1	10,5	11,55	12,6	13,65	14,7	
5		2,2	11	12,1	13,2	14,3	15,4	
6		2,3	11,5	12,65	13,8	14,95	16,1	
7		2,4	12	13,2	14,4	15,6	16,8	
8		2,5	12,5	13,75	15	16,25	17,5	
9		2,6	13	14,3	15,6	16,9	18,2	
10		2,7	13,5	14,85	16,2	17,55	18,9	
11		2,8	14	15,4	16,8	18,2	19,6	
12		2,9	14,5	15,95	17,4	18,85	20,3	
13		3	15	16,5	18	19,5	21	
14		3,1	15,5	17,05	18,6	20,15	21,7	
15		3,2	16	17,6	19,2	20,8	22,4	
16		3,3	16,5	18,15	19,8	21,45	23,1	
17		3,4	17	18,7	20,4	22,1	23,8	
18		3,5	17,5	19,25	21	22,75	24,5	
19		3,6	18	19,8	21,6	23,4	25,2	
20		3,7	18,5	20,35	22,2	24,05	25,9	
21		3,8	19	20,9	22,8	24,7	26,6	
22		3,9	19,5	21,45	23,4	25,35	27,3	
23		4	20	22	24	26	28	
24		4,1	20,5	22,55	24,6	26,65	28,7	
25		4,2	21	23,1	25,2	27,3	29,4	
26								
27								

$B_3\left(4 + \frac{E_2}{2}\right)$

Dans la suite de l'exercice on considère que l'espacement entre les véhicules est l'espacement minimal ainsi calculé.

1. La cellule E13 contient la valeur 18. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

2. Choisir une formule parmi celles données ci-dessous qui peut être saisie en E3 puis étirée vers le bas pour calculer l'ensemble des valeurs de la colonne E.

=$B3*(4+E$2/2)	=2*(4+4/2)	=12
=B3*(4+E2/2)	=B3*(4+4/2)	=$B$3*(4+$E$2/2)

3. Le débit D en nombre de personnes par heure est fourni par la formule :

$$D = 3\,600\, n\, \frac{V}{E}$$

L'affirmation suivante est-elle cohérente avec les données de cet exercice ?

Les télésièges fabriqués en 2010 sont généralement équipés de véhicules à quatre places, avec une vitesse de ligne de 2,3 m/s et peuvent, au maximum, atteindre un débit de 2 400 personnes par heure.

Source : http://fr.wikipedia.org/wiki/Télésiège

4. Pour des véhicules à quatre sièges, une vitesse de 2 m/s fournira-t-elle un meilleur débit qu'une vitesse de 3 m/s ? (On se placera dans le cadre d'un espacement minimal dans chaque situation).

5. Montrer que, dans le cas où on choisit l'espacement minimal en fonction de la vitesse, le débit peut s'exprimer uniquement en fonction du nombre de sièges par véhicule.
Cela confirme-t-il ou non le résultat trouvé à la question **4.** ?

EXERCICE 4

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Une réponse fausse n'enlève pas de points, une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. ABCD est un quadrilatère.
Affirmation : si ses diagonales sont perpendiculaires, alors c'est un losange.

2. À l'occasion des soldes, le prix d'un article est réduit de 25 %.
Avec sa carte de fidélité, Carine bénéficie de 20 % de réduction supplémentaire sur le prix réduit.
Affirmation : Carine bénéficie d'une réduction égale à 40 % du prix initial de l'article.

3. Dans une classe, le nombre de filles est exactement égal à $\frac{3}{4}$ du nombre de garçons.
Affirmation : Exactement un quart des élèves de la classe sont des garçons.

4. Soient a et b deux nombres entiers.
On effectue la division euclidienne du nombre a par 7. On trouve comme reste 3.
On effectue la division euclidienne du nombre b par 7. On trouve comme reste 4.
Affirmation : le nombre $a + b$ est divisible par 7.

TROISIÈME PARTIE

(14 points)

Les trois situations sont indépendantes.

SITUATION 1

Voici l'extrait d'un article sur les nombres décimaux et les fractions de l'ouvrage « *Le nombre au cycle 3, les apprentissages numériques* », publié aux éditions Scérén.

> *« Pour permettre aux élèves de donner du sens à ces nouveaux nombres, et justifier leur introduction, il est nécessaire de proposer des activités qui leur permettent de prendre conscience que :*
>
> *- les nombres décimaux, et plus généralement les fractions, permettent de résoudre de nouveaux problèmes ;*
>
> *[...]*
>
> *- certains raisonnements et certaines procédures correctes avec les nombres entiers peuvent ne plus l'être avec les nombres décimaux et les fractions. »*

1. Existe-t-il des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction mais qui ne sont pas des nombres décimaux ? Si oui, donner un exemple d'un tel nombre, si non, justifier.
2. Existe-t-il des nombres décimaux qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction ? Si oui, donner un exemple d'un tel nombre, si non, justifier.
3. Donner un exemple de procédure ou de raisonnement correct avec les nombres entiers mais qui peut s'avérer erroné avec les nombres décimaux.

SITUATION 2

Un enseignant propose le problème suivant à ses élèves de cycle 3 :

> *« Nicolas a acheté 2 kg de pommes. Il a payé 4 €. Léo a acheté la même variété de pommes dans le même magasin. Il a payé 5 €. Quelle masse de pommes a-t-il achetée ? »*

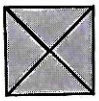
Proposer trois procédures, attendues d'élèves de cycle 3, pour résoudre ce problème, l'une au moins ne nécessitant pas le recours aux nombres décimaux.

SITUATION 3

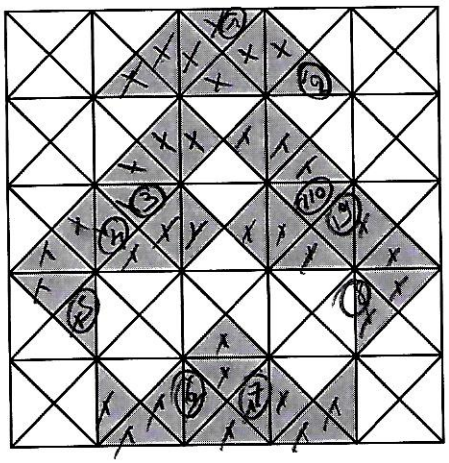
Dans une classe de CM2 un professeur propose le travail suivant aux élèves.

Exercice :

Quelle est l'aire, en cm², de la figure grise ?



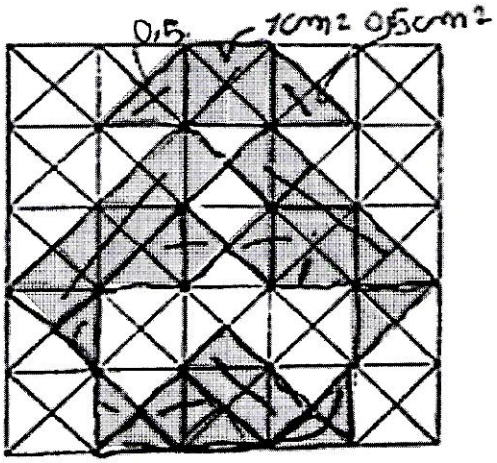
4 triangles = 1 cm²



Les productions de quatre élèves sont présentées ci-après. Pour faciliter leur lecture, certaines réponses d'élèves ont été transcrites en italique et entre parenthèses.

1. Pour les productions de Terry et de Raphaëlle, citer trois compétences qui semblent acquises et analyser les éventuelles erreurs.
2. Pour les productions de Clément et de Cloé, analyser les procédures en pointant les éléments qui les rapprochent et ceux qui les séparent.

Production de Raphaëlle



1cm² ÷ 2 = 0,5cm²
0,5 ÷ 2 = 0,25cm²
1 triangle = 0,25cm²

2
+ 2
1 2
+ 1
+ 1
+ 0,5
+ 0,5
+ 0.25
+ 1
10,25cm2

L'aire de la figure grise est de 10,25

(L'aire de la figure grise et de 10,25)

Production de Terry

Il y a 43 triangle donc 7 Unité $\frac{3}{4}$ cm²

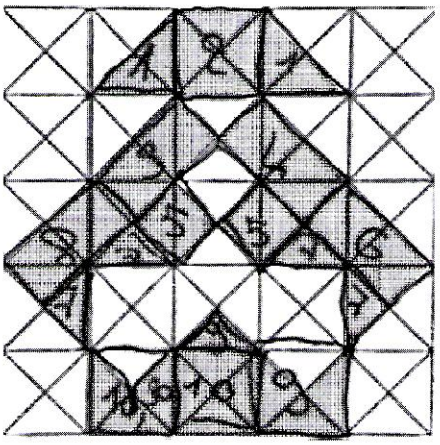
(Il y a 43 triangle donc 10 unité + $\frac{3}{4}$ cm²)

Production de Clément

43 | 4
4 | 10
03
0
3

La figure grise fait 10,3 cm².

Production de Cloé



j'ai compté 10,3 carrés

je vérifie

43 | 4
-4 | 10,7
03
- 0
30
-28
02

L'aire de cette figure est de 10,3 cm²